



6. 设常数  $p \in (0, 1)$ , 则反常积分  $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  与  $I_2 = \int_1^{+\infty} p^x dx$  的敛散性为

- A.  $I_1$  与  $I_2$  都收敛  
 B.  $I_1$  与  $I_2$  都发散  
 C.  $I_1$  收敛,  $I_2$  发散  
 D.  $I_1$  发散,  $I_2$  收敛

7. 下列级数发散的是

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$   
 B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$   
 C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$   
 D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$

8. 二次积分  $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$  在极坐标系下可表示为

- A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(\rho^2) \rho d\rho$   
 B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 f(\rho^2) \rho d\rho$   
 C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1-\cos\theta} f(\rho^2) \rho d\rho$   
 D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} f(\rho^2) \rho d\rho$

## 二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{k}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ , 则常数  $k = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

10. 已知  $\vec{a} = (2, -3, 4)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, -1)$ , 则  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

11. 设函数  $f(x) = \frac{x^{2021} - 1}{x}$ , 则  $f^{(2021)}(1) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

12. 设曲线  $\begin{cases} x = 3 + t + t^2 \\ y = 12 + 10t - 2t^2 \end{cases}$  在点  $P$  处的切线方程为  $y = 2x + 10$ , 则切点  $P$  的坐标为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

13. 设  $\ln(1 + x^2)$  是函数  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int_0^1 f'(x) dx = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

14. 设常数  $a > 0$ , 若幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{a^n}$  的收敛区间为  $(-1, 3)$ , 则  $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

## 三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \arctan x}\right)$ .

16. 求不定积分  $\int x \cos(2x - 3) dx$ .

17. 求定积分  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ .

18. 已知直线  $L$  在平面  $\Pi_1: x + y + z - 1 = 0$  上, 且通过平面  $\Pi_1$  与  $x$  轴的交点, 又与平面  $\Pi_2: x + 2y + 3z + 6 = 0$  平行, 求直线  $L$  的方程.

19. 设函数  $z = y^3 f\left(\frac{x}{y}, e^x\right)$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

20. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z^3 - 3x^2z - 6yz + 3x - 3y = 1$  所确定的二元函数, 求  $dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ .

21. 计算二重积分  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2 (x \leq 0)$  与直线  $y = x$  及  $y = 1$  所围成的平面闭区域.

22. 设函数  $y = f(x)$  是微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 0$  满足初始条件  $y(0) = y'(0) = 1$  的特解, 求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$  的通解.

#### 四、证明题(本大题 10 分)

23. 证明: 当  $x > 0$  时,  $2 - \frac{e}{x} \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$ .

#### 五、综合题(本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 设  $D$  是由曲线  $y = 1 - ax^2$ ,  $y = \frac{1}{a}x^2 (x \geq 0, a > 0)$  与  $y$  轴所围成的平面图形.

(1) 求  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积  $V(a)$ ;

(2) 问  $a$  为何值时,  $V(a)$  取最大值? 并求此时  $D$  的面积.

25. 设可导函数  $f(x)$  满足方程  $f(x) + \int_0^x tf(t) dt = 1$ , 求:

(1) 函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间与拐点;

(3) 曲线  $y = f(x)$  的渐近线.